Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год

8 класс

1. В таблице 3×3 расставьте числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 так, чтобы произведение чисел в первом столбце равнялось бы произведению чисел в первой строке, произведение чисел во втором столбце равнялось бы произведению чисел во второй строке и произведение чисел в третьем столбце равнялось бы произведению чисел в третьей строке.

2. Существуют ли 2018 пар натуральных чисел $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют условиям: 1) в каждой паре x и y не совпадают; 2) в каждой следующей паре число x на 1 больше числа x предыдущей пары; 3) в каждой следующей паре число y на 1 больше числа y предыдущей пары; 4) в каждой паре x делится на y?

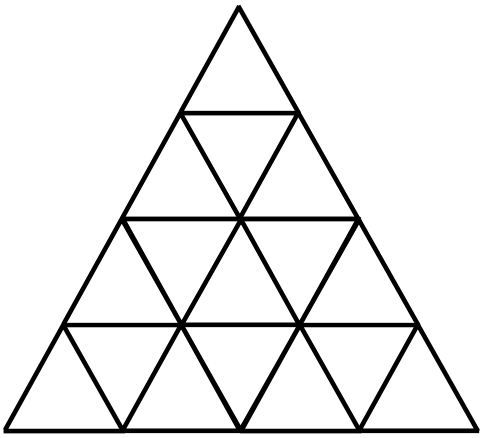
3. В треугольнике ABC угол A равен α, BC – наименьшая сторона. На стороне AB отмечена точка P и на стороне AC отмечена точка Q так, что $PB = BC = CQ$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке M. Найдите величину угла BMC.

4. Фирма называется публичной, если ее акциями владеет не менее 15 акционеров. Акционер фирмы называется миноритарием, если он владеет не более, чем 25% акций этой фирмы. На бирже, где проходят торги акциями, шестая часть фирм – публичные. Докажите, что среди всех акционеров, участвующих в торгах на бирже, не менее 20% – миноритарии. При проведении биржевых торгов считается, что каждый акционер владеет акциями только одной фирмы.

5. Может ли квадрат какого-нибудь натурального числа оказаться наименьшим общим кратным двух подряд идущих натуральных чисел? Обоснуйте свой ответ.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год
9 класс

1. Саша, Женя и Валя сидят за треугольным столом, который расчерчен на маленькие треугольнички, как показано на рисунке.



Они заполняют все треугольнички числами -1 и 1. После заполнения всех треугольничков они вычисляют произведения чисел, стоящих в своих горизонтальных рядах и складывают получившиеся призведения. (У каждого человека, сидящего за столом, свое соответствующее направление горизонтали – параллельное стороне стола, обращенной к сидящему). Может ли окзаться, что при какой-то расстановке -1 и 1 Саша получит в сумме 4, Женя получит в сумме -4, а Валя получит в сумме 0?

2. Пусть a, b, c – положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$

3. Окружность радиуса 26 касается двух смежных сторон прямоугольника, длины которых – 36 и 60. Найдите, на какие отрезки окружность делит стороны прямоугольника.

4. Решите уравнение

$$n^4-2n^2=m^2+38$$

где n, m – целые числа.

5. Про три различных целых числа x, y, z известно, что xy делится на 576, yz делится на 324, xz делится на 5184. Делится ли $(x-y)(y-z)(z-x)$ на 48?

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год
10 класс

1. На доске написана таблица, содержащая 100 столбцов и 2 строки. Саша и Женя по очереди заполняют по одной клетке таблицы, вписывая -1 или 1. Первый ход делает Саша. После того, как таблица полностью заполнена, для каждой строки вычисляются произведения всех 100 чисел, стоящих в этой сроке. Аналогично для каждого столбца вычисляются произведения двух чисел, стоящих в этом столбце. Может ли Женя делать свои ходы таким образом, чтобы в заполненной таблице сумма вычисленных произведений чисел в строках равнялась -2, а сумма всех вычисленных произведений чисел в столбцах равнялась 0?

2. Известно, что $a < b < c$. Докажите, что уравнение
$$3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ac = 0$$
имеет два различных корня x_1 и x_2, причем $a < x_1 < b$, $b < x_2 < c$.

3. Две прямые l_1 и l_2, угол между которыми равен α, служат общими внутренними касательными к окружностям радиусов R_1 и R_2. К окружностям проведена общая внешняя касательная, пересекающая прямые l_1 и l_2 в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AB.

4. Докажите равенство
$$2018 \cdot 1 + 2017 \cdot 2 + 2016 \cdot 3 \ldots + (2019 - k) \cdot k + \ldots + 1 \cdot 2018 =$$
$$= \frac{2019 \cdot 2018}{2} + \frac{2018 \cdot 2017}{2} + \frac{2017 \cdot 2016}{2} + \ldots + \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \ldots + \frac{2 \cdot 1}{2}$$

5. Взяли десять подряд идущих натуральных чисел, больших 1, перемножили их, нашли все простые делители полученного числа и перемножили эти простые делители (взяв каждый ровно по одному разу). Какое наименьшее число могло получиться? Полностью обоснуйте свой ответ.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год
11 класс

1. Сумма семи различных натуральных чисел равна $2n$. Верно ли, что обязательно найдутся три числа среди этих семи чисел, сумма которых больше n?

2. Найдите все положительные решения уравнения
$$x^{101} + 100^{99} = x^{99} + 100^{101}$$
Не забудьте обосновать свой ответ.

3. Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Точка O – середина средней линии трапеции. Точки K, L, M, N – образы вершин A, B, C, D при центральной симметрии относительно точки O. Прямые KM и NL пересекают стороны CD и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что каждый из отрезков CM, BL, AP, DQ делит площадь трапеции пополам.

4. Многочлен с целыми коэффициентами принимает значение 2018 ровно в 2018 целых точках. Докажите, что многочлен не может иметь целые корни.

5. Докажите, что для любого натурального числа a, все простые делители которого не меньше 7, найдется такое натуральное число m, что произведение am будет числом, десятичная запись которого состоит только из единиц.