Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год

8 класс

Решения и ответы

1. В таблице 3×3 расставьте числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 так, чтобы произведение чисел в первом столбце равнялось бы произведению чисел в первой строке, произведение чисел во втором столбце равнялось бы произведению чисел во второй строке и произведение чисел в третьем столбце равнялось бы произведению чисел в третьей строке.
Решение.

7	3	8
6	9	5
4	10	11

Достаточно привести требуемую расстановку. Принципиальным является размещение 7, 9, 11 на диагонали. Возможны соотвествующие перестановки столбцов и строк.
Ответ. См. рис.

2. Существуют ли 2018 пар натуральных чисел $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют условиям: 1) в каждой паре x и y не совпадают; 2) в каждой следующей паре число x на 1 больше числа x предыдущей пары; 3) в каждой следующей паре число y на 1 больше числа y предыдущей пары; 4) в каждой паре x делится на y?
Решение. Такие пары существуют. Достаточно привести пример.

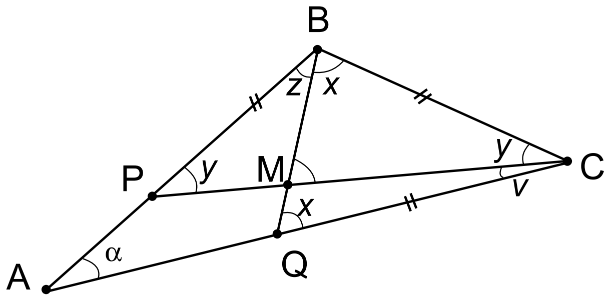
$$(2018! + 1; 1),\ (2018! + 2; 2),\ (2018! + 3; 3),\ \ldots,\ (2018! + 2018; 2018)$$

Ответ. Существуют.

3. В треугольнике ABC угол A равен α, BC – наименьшая сторона. На стороне AB отмечена точка P и на стороне AC отмечена точка Q так, что $PB = BC = CQ$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке M. Найдите величину угла BMC.
Решение.

Треугольники PBC и QBC – равнобедренные, соответствующие стороны отмечены на рисунке. Обозначим углы: $\angle QBC = \angle BQC = x$, $\angle PBC = \angle BPC = y$, $\angle ABQ = z$, $\angle ACP = v$. По свойству внешнего угла, примененному к треугольникам ABQ и APC,

$$\begin{cases} \alpha + z = x, \\ \alpha + v = y. \end{cases}$$



Напишем сумму углов треугольника ABC

$$\alpha + z + x + y + v = 180^\circ$$

Из системы выразим $z + v$.

$$z + v = x + y - 2\alpha$$

Отсюда $\alpha + 2x + 2y - 2\alpha = 180^\circ, \quad x + y = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha.$
Находим искомый угол

$$\angle BMC = 180^\circ - (x + y) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$$

Ответ.$90^\circ - \frac{1}{2}\alpha.$

4. Фирма называется публичной, если ее акциями владеет не менее 15 акционеров. Акционер фирмы называется миноритарием, если он владеет не более, чем 25% акций этой фирмы. На бирже, где проходят торги акциями, шестая часть фирм – публичные. Докажите, что среди всех акционеров, участвующих в торгах на бирже, не менее 20% – миноритарии. При проведении биржевых торгов считается, что каждый акционер владеет акциями только одной фирмы.
   Решение. Пусть число фирм на бирже равно N. Назовем акционера, который владеет более, чем 25% акций фирмы, настоящим акционером. Число настоящих акционеров одной фирмы не может быть более трех. (Если их четверо, то какому-то одному из них не может достаться более 25% акций). Поэтому число всех настоящих акционеров на бирже не может превышать 3N. Теперь рассмотрим публичную фирму. Среди ее акционеров – не более трех настоящих. Значит, среди акционеров публичной фирмы не менее 12 – миноритарии. Число миноритариев на бирже не менее, чем $12 \cdot \frac{1}{6}N$, т.е. не менее 2N. Итак, число миноритариев не менее 2N, число настоящих акционеров не более 3N, значит, миноритарии составляют не менее одной пятой, т.е. не менее 20%.

5. Может ли квадрат какого-нибудь натурального числа оказаться наименьшим общим кратным двух подряд идущих натуральных чисел? Обоснуйте свой ответ.
   Решение. Нет, НОК подряд идущих чисел не может оказаться квадратом натурального числа. Заметим, что два подряд идущих числа, n и $n + 1$, являются взаимно простыми. (Этот факт считается известным, и при необходимости доказывается так: если n имеет делитель d, $d > 1$, то $n + 1$ не может иметь

делитель d, так как 1 не делится на d.) Поэтому все простые числа, входящие в разложение n на простые множители, не могут входить в разложение $n+1$, и наоборот. Значит, НОК$(n, n+1)$ равен произведению $n \cdot (n+1)$. Если бы НОК был бы равен квадрату какого-либо числа, то все простые множители, входящие в НОК, входили бы в четной степени. Поэтому каждое из чисел n и $n+1$ являлось бы квадратом, а это невозможно – двух подряд идущих квадратов не существует. (Действительно, в разложении $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ по крайней мере один множитель больше 1.)

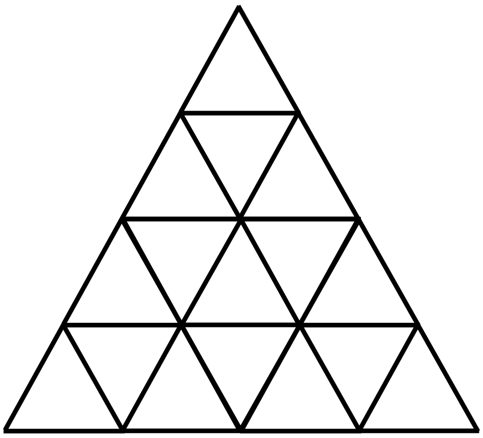
Ответ. Не может.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год

9 класс

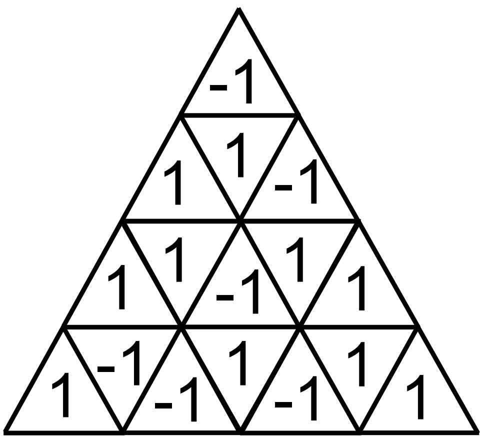
Решения и ответы

1. Саша, Женя и Валя сидят за треугольным столом, который расчерчен на маленькие треугольнички, как показано на рисунке.



Они заполняют все треугольнички числами -1 и 1. После заполнения всех треугольничков они вычисляют произведения чисел, стоящих в своих горизонтальных рядах и складывают получившиеся призведения. (У каждого человека, сидящего за столом, свое соответствующее направление горизонтали – параллельное стороне стола, обращенной к сидящему). Может ли окзаться, что при какой-то расстановке -1 и 1 Саша получит в сумме 4, Женя получит в сумме -4, а Валя получит в сумме 0?

Решение. Одна из возможных расстановок показана на рисунке. Необходимо



расставить -1 так, чтобы по одному направлению в каждом ряду они встречались бы четное число раз, по второму направлению в каждом ряду -1 встречались бы нечетное число раз, по третьему направлению в двух строках -1 стояли бы четное число раз, и в двух строках – нечетное число раз.

Ответ. Может.

2. Пусть a, b, c – положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$

Решение. Воспользуемся неравенством между средним арифметическом и средним гармоническим. Известно, что для положительных x, y выполняется

$$\frac{x+y}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

В нашем случае по очереди применяем это неравенство к парам $\left(x=\dfrac{1}{a},\ y=\dfrac{1}{b}\right)$; $\left(x=\dfrac{1}{b},\ y=\dfrac{1}{c}\right)$; $\left(x=\dfrac{1}{c},\ y=\dfrac{1}{a}\right)$.

$$\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{2}\geq\frac{2}{a+b}$$

$$\frac{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{2}\geq\frac{2}{b+c}$$

$$\frac{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}}{2}\geq\frac{2}{c+a}$$

Сложим эти три неравенства

$$\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{2}+\frac{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{2}+\frac{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}}{2}\geq\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}$$

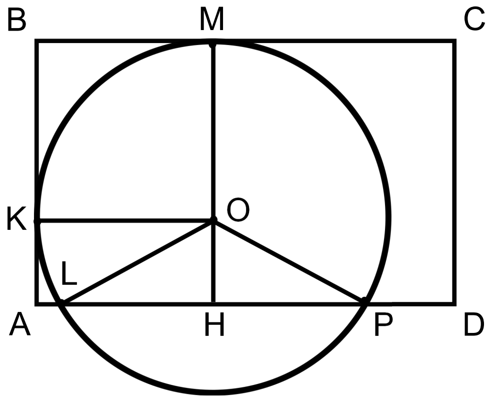
Остается поделить обе части неравенства на 2

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$

Неравенство доказано. Оно получено как следствие неравенства о средних.

3. Окружность радиуса 26 касается двух смежных сторон прямоугольника, длины которых – 36 и 60. Найдите, на какие отрезки окружность делит стороны прямоугольника.
Решение.

Заметим, что радиус окружности больше половины короткой стороны прямоугольника, а диаметр окружности меньше его длинной стороны. Это означает, что окружность пересекает длинную сторону прямоугольника, противоположную касающейся, в двух точках, и не пересекает вторую короткую сторону. Обозначение точек показано на рисунке. Точки K и M – точки касания, радиусы OK и OM перпендикулярны сторонам прямоугольника. Так как $BMOK$ – квадрат, то отрезки BM и BK равны 26. В треугольнике OLH известны две стороны – гипотенуза OL равна 26 и катет OH равен 10. По теореме Пифагора находим катет LH, он равен 24. Отсюда отрезок AL равен 2, и отрезок LP равен 48. Окружность делит сторону AD на отрезки длиной 2, 48, 10.
Ответ. 26 и 34; 26 и 10; 2, 48 и 10.



4. Решите уравнение $n^4 - 2n^2 = m^2 + 38$, где n, m – целые числа.
Решение. Прибавим 1 к левой и правой части уравнения.

$$n^4 - 2n^2 + 1 = m^2 + 39$$

Свернем квадрат разности, перенесем m^2 в левую часть и разложим ее на множители.

$$(n^2 - 1)^2 - m^2 = 39$$

$$(n^2 - 1 - m) \cdot (n^2 - 1 + m) = 39$$

Получаем восемь возможностей, которые оформим в виде систем уравнений

$$\begin{cases} n^2 - m - 1 = 39, \\ n^2 + m - 1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - m - 1 = 1, \\ n^2 + m - 1 = 39, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - m - 1 = 13, \\ n^2 + m - 1 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - m - 1 = 3, \\ n^2 + m - 1 = 13, \end{cases}$$

$$\begin{cases} n^2 - m - 1 = -39, \\ n^2 + m - 1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - m - 1 = -1, \\ n^2 + m - 1 = -39, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - m - 1 = -13, \\ n^2 + m - 1 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - m - 1 = -3, \\ n^2 + m - 1 = -13. \end{cases}$$

Покажем, как сократить преобразования и избежать решения восьми систем. Пусть a и b – два целых парных делителя числа 39, т.е. $ab = 39$.
Из каждой системы $\begin{cases} n^2 - m - 1 = a, \\ n^2 + m - 1 = b, \end{cases}$ можно выразить n^2, сложив два уравнения

$$n^2 = \frac{a + b}{2} + 1$$

Очевидно, отрицательные пары a, b не дают решений для n^2. Всего, с учетом симметричности, существует две пары $a = 1$, $b = 39$ и $a = 3$, $b = 13$. Первая пара приводит к $n^2 = 21$, вторая пара приводит к $n^2 = 9$. Значение 21 не приводит к целому n. Подставим $n^2 = 9$ в исходное уравнение, получим $m^2 = 25$, $m = \pm 5$. $n^2 = 9$ приводит к $n = \pm 3$, выбор n не зависит от выбора m.
Ответ. $(-5; -3), (-5; 3), (5; -3), (5; 3)$.

5. Про три различных целых числа x, y, z известно, что xy делится на 576, yz делится на 324, xz делится на 5184. Делится ли $(x - y)(y - z)(z - x)$ на 48?
Решение.
$576 = 2^6 \cdot 3^2$, $324 = 2^2 \cdot 3^4$, $5184 = 2^6 \cdot 3^4$. Представим числа x, y, z в виде разложения на простые множители, выделив степени 2 и 3.
$x = x_0 \cdot 2^k \cdot 3^l$,

$y = y_0 \cdot 2^m \cdot 3^n$,
$z = z_0 \cdot 2^s \cdot 3^t$,
x_0, y_0, z_0 не делятся ни на 2, ни на 3. Получим попарные произведения
$xy = x_0 y_0 \cdot 2^{k+m} \cdot 3^{l+n}$,
$yz = y_0 z_0 \cdot 2^{m+s} \cdot 3^{n+t}$,
$xz = x_0 z_0 \cdot 2^{k+s} \cdot 3^{l+t}$,
Условие задачи приводит к двум системам неравенств, одной для степеней 2 и второй для степеней 3.

$$\begin{cases} k+m \geq 6, \\ m+s \geq 2, \\ k+s \geq 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} l+n \geq 2, \\ n+t \geq 4, \\ l+t \geq 4. \end{cases}$$

Показатели степеней – неотрицательные целые числа. Первая система допускает два случая. Первый случай – в неравенстве $m+s \geq 2$ одна из переменных равна 0, например, s. Тогда $m \geq 2$, $k \geq 6$. При таких значениях $k - s \geq 6$, и $(x-z)$ делится на 2^6 (нам достаточно делимости на 2^4). Второй случай – в неравенстве $m+s \geq 2$ про обе переменных можно сказать только, что $m \geq 1$, $s \geq 1$. Это значит, что каждая из величин x, y, z делится на 2. Если две из этих перемнных делятся на 4, произведение $(x-y)(y-z)(z-x)$ делится на 2^4. Остается рассмотреть $m = 1$, $s = 1$. Делимость каждой из переменных x, y, z на 2 приводит к делимости произведения этих скобок на 8. Вынесем 2 за скобку в разности $(x-z)$. Остается разность двух нечетных чисел, она четна и дает четвертую двойку. Итак, во всех случаях $(x-y)(y-z)(z-x)$ делится на 16. Докажем делимость этого произведения на три, рассмотрев вторую систему неравенств. При l или n, равном 0, вторая из этих переменных не меньше 2, t не меньше 2, и разность $(x-y)(y-z)(z-x)$ делится на 9. Если ни одна из переменнх l, n, t не равна 0, то каждая из переменных x, y, z делится на 3, и произведение $(x-y)(y-z)(z-x)$ делится на 3. Тем самым доказано, что произведение $(x-y)(y-z)(z-x)$ делится на 48.
Ответ. Делится.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год

10 класс

Решения и ответы

1. На доске написана таблица, содержащая 100 столбцов и 2 строки. Саша и Женя по очереди заполняют по одной клетке таблицы, вписывая -1 или 1. Первый ход делает Саша. После того, как таблица полностью заполнена, для каждой строки вычисляются произведения всех 100 чисел, стоящих в этой сроке. Аналогично для каждого столбца вычисляются произведения двух чисел, стоящих в этом столбце. Может ли Женя делать свои ходы таким образом, чтобы в заполненной таблице сумма вычисленных произведений чисел в строках равнялась -2, а сумма всех вычисленных произведений чисел в столбцах равнялась 0?
Решение. Рассмотрим пары клеток таблицы в каждом ряду, где в каждую пару войдет клетка с нечетным и четным номером. Выигрышная стратегия Жени – предоставить Саше возможность сделать первый ход в каждую такую пару. Пусть Саша заполнит одну (любую) из двух клеток. В ответ Жене нужно заполнить вторую клетку пары по следующему правилу. В первой паре верхней строки Жене следует поставить такое же число, какое поставит Саша. В приведенной ниже таблице это указано как пара $|y|y|$. Во всех парах верхней строки, кроме первой, Жене следует написать число, противоположное поставленному Сашей. В приведенной ниже таблице это указано как пара $|x|-x|$. В нижней строке пары заполнются наоборот - первая пара после заполнения должна содержать два противоположных числа $|x|-x|$, все остальные пары, кроме первой, должны содержать одинаковые числа $|y|y|$. Очевидно, Женя всегда сможет сделать нужный ход в каждой паре. После расстановки -1 и 1 в соответствии с этой стратегией в каждой строке окажется нечетное число минус единиц, произведение чисел в строке будет равно -1. Сумма произведений в строках будет равна -2. В соседних нечетном и четном столбцах произведения чисел окажутся противоположными, и сумма этих произведений будет нулевой.

y	y	x	$-x$	x	$-x$	$\ldots$	x	$-x$	x	$-x$
x	$-x$	y	y	y	y	$\ldots$	y	y	y	y

Ответ. Может.

2. Известно, что $a < b < c$. Докажите, что уравнение
$$3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ac = 0$$
имеет два различных корня x_1 и x_2, причем $a < x_1 < b$, $b < x_2 < c$.
Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ac$ и подставим в нее по очереди значения $x = a$, $x = b$, $x = c$.
$$f(a) = 3a^2 - 2(a+b+c)a + ab + bc + ac = a^2 - ab - ac + bc = (a-b)(a-c)$$
С учетом неравенства, данного в условии, $f(a) > 0$.
Аналогично,
$$f(b) = 3b^2 - 2(a+b+c)b + ab + bc + ac = b^2 - ab - bc + ac = (b-a)(b-c)$$

$f(b) < 0$.

$$f(c) = 3c^2 - 2(a+b+c)c + ab + bc + ac = c^2 - ac - bc + ab = (c-a)(c-b)$$

$f(c) > 0$.

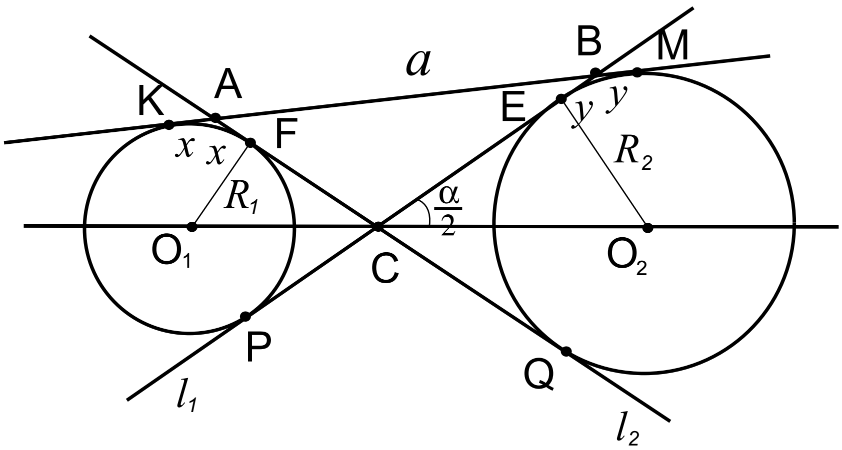
Так как квадратичная функция принимает значения разных знаков в точках a и b, то между этими точками функция имеет корень. Аналогично она имеет корень, расположенный между точками b и c. Так как рассматриваемое уравнение - квадратное, то оно не может иметь более двух корней. Утверждение доказано.

Добавление. Уравнение путем группировки сразу может быть свернуто к виду

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) = 0$$

Подстановка $x = a$, $x = b$, $x = c$ в это выражение сразу приводит к полученным ранее произведениям.

3. Две прямые l_1 и l_2, угол между которыми равен α, служат общими внутренними касательными к окружностям радиусов R_1 и R_2. К окружностям проведена общая внешняя касательная, пересекающая прямые l_1 и l_2 в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AB.
Решение.



Обозначения показаны на рисунке. Внешняя касательная – это прямая AB. Длину отрезка AB обозначим a. Пусть отрезки касательных, проведенных из точек A и B, соответственно равны x и y. Учитывая данные задачи, находим длины отрезков внутренних касательных, проведенных из точки их пересечения C. $CF = CP = R_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $CE = CQ = R_2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Отрезки касательных AQ и AB, проведенных ко второй окружности из точки A, равны между собой. Также равны отрезки BP и BK. Это приводит к системе двух уравнений

$$\begin{cases} x + R_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + R_2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = a + y, \\ y + R_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + R_2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = a + x. \end{cases}$$

Из уравнений следует, что $x = y$, значит, $a = (R_1 + R_2) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.
Ответ. $(R_1 + R_2) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$

4. Докажите равенство

$$2018\cdot 1+2017\cdot 2+2016\cdot 3\ldots+(2019-k)\cdot k+\ldots+1\cdot 2018=$$

$$=\frac{2019\cdot 2018}{2}+\frac{2018\cdot 2017}{2}+\frac{2017\cdot 2016}{2}+\ldots+\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\ldots+\frac{2\cdot 1}{2}$$

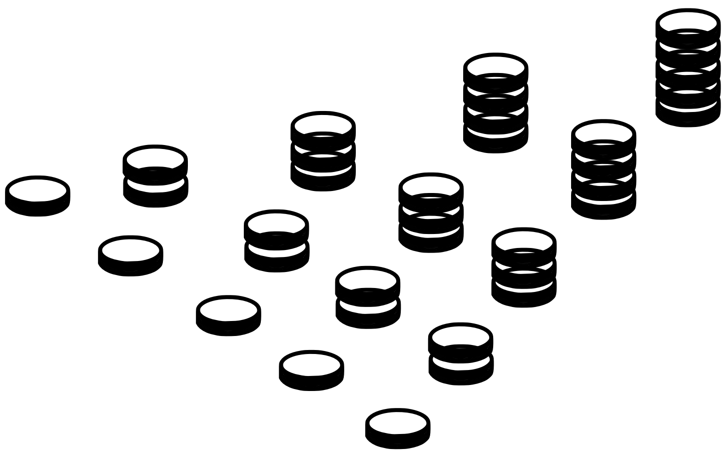
Решение.

$2018\cdot 1+2017\cdot 2+2016\cdot 3\ldots+(2019-k)\cdot k+\ldots+1\cdot 2018=$
$=2018+2017+2017+2016+2016+2016+\ldots+$
$+\underbrace{(2019-k)+(2019-k)+\ldots+(2019-k)}_{k\text{ раз}}+\ldots+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2018\text{ раз}}=$
$=(2018+2017+2016+\ldots+1)+(2017+2016+\ldots+1)+(2016+\ldots+1)+\ldots+$
$((2019-k)+\ldots+1)+\ldots+1=$

Каждая сумма в скобках является суммой арифметической прогрессии

$=\frac{2018+1}{2}\cdot 2018+\frac{2017+1}{2}\cdot 2017+\frac{2016+1}{2}\cdot 2016+\ldots$
$+\frac{(2019-k)+1}{2}\cdot(2019-k)+\ldots+\frac{2+1}{2}\cdot 2+1=$
$=\frac{2019\cdot 2018}{2}+\frac{2018\cdot 2017}{2}+\frac{2017\cdot 2016}{2}+\ldots+\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\ldots+\frac{3\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 1}{2}$

Задача имеет наглядную иллюстрацию. Разложим в стопки монеты в таком порядке: в первый ряд положим 2018 монет, во второй ряд положим 2017 стопок по две монеты, в третий ряд положим 2016 стопок по три монеты, в k-й ряд положим $(2019-k)$ стопок по k монет, последней будет положена одна стопка из 2018 монет. На рисунке такая раскладка показана для пяти рядов. Сумма в левой части равенства – это количество всех монет, посчитанное по рядам в том порядке, как мы раскладывали монеты. Сумма в правой части доказываемого равенства – это сумма всех монет, посчитанная по параллельным рядам, идущим вдоль другой стороны получившегося треугольника.



5. Взяли десять подряд идущих натуральных чисел, больших 1, перемножили их, нашли все простые делители полученного числа и перемножили эти простые делители (взяв каждый ровно по одному разу). Какое наименьшее число могло получиться? Полностью обоснуйте свой ответ.

   Решение. Докажем, что среди десяти подряд идущих чисел обязательно найдется число, которое имеет простой делитель, отличный от 2, 3, 5, 7. Посчитаем, сколько чисел из десяти идущих подряд может иметь указанные четыре

делителя. Из десяти чисел ровно пять делятся на 2, при этом не менее одного из этих пяти чисел делится на 3. (*Этот факт в работе можно не доказывать, тем не менее напомним одно из возможных доказательств. Остатки от деления на 6 шести подряд идущих чисел составляют набор от 0 до 5, т.е. найдется число, имеющее остатком 0, которое делится и на 2, и на 3.*) Далее, рассматриваемый набор из десяти чисел содержит не менее трех и не более четырех чисел, которые делятся на 3. Если таких чисел три, не менее одного этих трех делится на 2, и оно уже учтено ранее. Если таких чисел четыре, то они имеют вид $3k$, $3k+3$, $3k+6$, $3k+9$. В зависимости от четности k, или $3k$, $3k+6$, или $3k+3$, $3k+9$ делятся на 2. Таким образом, при рассмотрении чисел, делящихся на 3, мы можем добавить к пяти четным числам не более двух новых. Десять подряд идущих чисел содержат ровно два числа, которые делятся на 5, из них ровно одно четное и рассмотрено ранее. Поэтому делимость на 5 добавляет не более одного числа к семи уже учтенным ранее. Среди десяти подряд идущих чисел не более двух делятся на 7, одно из этих чисел – четное, и уже учтено. Делимость на 7 добавляет не более 1 числа к уже учтенным восьми. Такиим образом, среди десяти подряд идущих чисел не более девяти, имеющих хотя бы один из делителей 2, 3, 5, 7, т.е. найдется число, имеющее больший простой делитель, и не делящееся ни на один из первых четырех простых чисел. Значит, в произведении десяти чисел встретится хотя бы один делитель, отличный от 2, 3, 5, 7, поэтому произведение всех простых делителей будет больше 210. Наименьшее возможное произведение $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$.
Ответ. 2310.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год

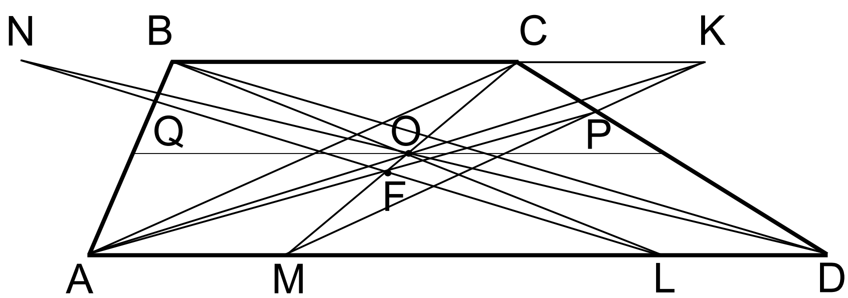
11 класс

Решения и ответы

1. Сумма семи различных натуральных чисел равна $2n$. Верно ли, что обязательно найдутся три числа среди этих семи чисел, сумма которых больше n?
Решение. Достаточно привести контрпример. Один из возможных: $n = 50$, семь чисел $11, 12, 13, 14, 15, 16, 19$. Сумма всех семи чисел равна 100. Сумма $15 + 16 + 19 = 50$. Так как эти три числа - наибольшие среди семи, то любая сумма трех чисел не превосходит 50.
Дополнение. Для построения контрпримера берется арифметическая прогрессия семи чисел с разностью 1, такая, что ее сумма является максимально возможной из меньших $2n$. Последнее число этой прогрессии заменяется на число, дополняющее сумму до $2n$. Этот алгоритм работает для таких натуральных n, k (k-первый член прогрессии), которые могут быть связаны уравнением $n = 4k + 6$. В приведенном контрпримере $n = 50, k = 11$.
Ответ. Не обязательно. Существует контрпример.

2. Найдите все положительные решения уравнения
$$x^{101} + 100^{99} = x^{99} + 100^{101}$$
Не забудьте обосновать свой ответ.
Решение. Уравнение приводится к виду
$$x^{99}(x^2 - 1) = 100^{99}(100^2 - 1)$$
Очевидно, решением является $x = 100$. При $0 < x \leq 1$ левая часть отрицательна, а правая часть положительна, решений нет. При $x > 1$ левая часть – возрастающая функция, поэтому необходимое значение принимает не более одного раза. Значит, других корней нет. *Ответ.* 100.

3. Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Точка O – середина средней линии трапеции. Точки K, L, M, N – образы вершин A, B, C, D при центральной симметрии относительно точки O. Прямые KM и NL пересекают стороны CD и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что каждый из отрезков CM, BL, AP, DQ делит площадь трапеции пополам.
Решение.



Все обозначения показаны на рисунке. Пусть длина нижнего основания AD равна a, верхнего основания BC равна b. Так как точка O по условию расположена на равном расстоянии от параллельных прямых, содержащих основания

трапеции, то при симметрии относительно этой точки прямые AD и BC переходят друг в друга.
Так как точка O – середина средней линии, и средняя линия трапеции содержит в себе среднюю линию треугольника CMD (параллельную основанию MD), то $MD = \dfrac{a+b}{2}$, т.е. этот отрезок равен средней трапеции. Отсюда сразу получаем, что площадь треугольника CMD равна половине площади трапеции. Рассуждения относительно треугольника ABL проводятся аналогично.
Так как точка A при симметрии переходит в K, M переходит в C, то отрезок AM переходит в отрезок CK, значит, $ACKM$ – параллелограмм, и прямые AC и KM параллельны. Поэтому $ACPM$ – трапеция. Пусть диагонали этой трапеции AP и CM пересекаются в точке F. Как известно, в любой трапеции площади двух треугольников, образованных диагоналями и боковыми сторонами, равны. В нашем случае равны площади треугольников AMF и CPF. Отсюда получаем, что площади тругольников APD и CMD равны между собой. Уже доказано, что площадь треугольника CMD равна половине площади трапеции, поэтому площадь треугольника APD также равна половине площади трапеции, что требовалось. Рассуждения про треугольник AQD проводятся аналогично.

4. Многочлен с целыми коэффициентами принимает значение 2018 ровно в 2018 целых точках. Докажите, что многочлен не может иметь целые корни.
Решение. Пусть $P(x)$ – данный многочлен, тогда $P(x)-2018$ имеет 2018 целых различных корней. В этом случае справедливо представление

$$P(x) - 2018 = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_{2018}) \cdot Q(x)$$

где $Q(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Это означает, что $P(x)$ можно представить как

$$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_{2018}) \cdot Q(x) + 2018$$

При подстановке любого целого числа x_0, отличного от $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2018}$, каждый множитель в произведении $(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_3) \cdot \ldots \cdot (x_0 - x_{2018}) \cdot Q(x_0)$ окажется целым, не равным 0. При этом все множители $(x_0 - x_k)$ различны. Поэтому найдутся три множителя, по модулю не меньшие $2, 3, 1009$, а остальные множители не меньше 1. Значит, произведение $(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_3) \cdot \ldots \cdot (x_0 - x_{2018}) \cdot Q(x_0)$ по модулю превосходит 2018 и $P(x)$ целых корней не имеет.

5. Докажите, что для любого натурального числа a, все простые делители которого не меньше 7, найдется такое натуральное число m, что произведение am будет числом, десятичная запись которого состоит только из единиц.
Решение. Пусть a – число, все простые делители которого отличны от 2, 3, 5. Число $\dfrac{1}{a}$ Раскладывается в периодическую десятичную дробь с периодом n. Это означает, что

$$\frac{1}{a} = 0, b_0 b_1 b_2 \ldots b_n b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

Здесь b_0 - непериодическое начало десятичной записи. Умножим левую и правую часть этого равенства на 10^k, подобрав k так, чтобы после запятой сразу шел период десятичной дроби. (b_0 - целая часть получившегося числа.)

$$\frac{10^k}{a} = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

Перепишем так

$$\frac{10^k - b_0 \cdot a}{a} = 0, b_1 b_2 \ldots b_n b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

Повторим действия, которые применяются при переводе периодической десятичной дроби в обыкновенную. Умножим левую и правую части равенства на 10^n.

$$\frac{10^k - b_0 \cdot a}{a} \cdot 10^n = \overline{b_1 b_2 \ldots b_n}, b_1 b_2 \ldots b_n b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

(Здесь $\overline{b_1 b_2 \ldots b_n}$ – традиционная форма записи натурального числа, образованного цифрами $b_1, b_2, \ldots b_n$.)

$$\frac{10^k - b_0 \cdot a}{a} \cdot 10^n = \overline{b_1 b_2 \ldots b_n} + 0, b_1 b_2 \ldots b_n b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

Заменим $0, b_1 b_2 \ldots b_n b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ на $\dfrac{10^k - b_0 \cdot a}{a}$.

$$\frac{10^k - b_0 \cdot a}{a} \cdot 10^n = \overline{b_1 b_2 \ldots b_n} + \frac{10^k - b_0 \cdot a}{a}$$

$$\frac{10^k - b_0 \cdot a}{a} \cdot (10^n - 1) = \overline{b_1 b_2 \ldots b_n}$$

$$(10^k - b_0 \cdot a)\underbrace{999\ldots 9}_{n \text{ девяток}} = \overline{b_1 b_2 \ldots b_n} \cdot a$$

$$(10^k - b_0 \cdot a) \cdot 9 \cdot \underbrace{111\ldots 1}_{n \text{ единиц}} = \overline{b_1 b_2 \ldots b_n} \cdot a$$

$$(9 \cdot 10^k - 9 \cdot b_0 \cdot a) \cdot \underbrace{111\ldots 1}_{n \text{ единиц}} = \overline{b_1 b_2 \ldots b_n} \cdot a$$

Справа стоит целое число, которое делится на a. Множитель $(9 \cdot 10^k - 9 \cdot b_0 \cdot a)$ взаимно прост с a. Действительно, если бы этот множитель имел хотя бы один общий простой делитель с a, то $9 \cdot 10^k$ делилось бы на этот простой делитель. Но $9 \cdot 10^k$ имеет простые делители только 2, 3, 5, а a не имеет этих делителей. Значит, второй множитель $\underbrace{111\ldots 1}$ делится на a, т.е. существует такое m, что произведение am будет числом, десятичная запись которого состоит только из единиц.